Beispiel:

Für eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

hat F_A die EW $a_1, \ldots, a_n$, und $\underline{e}_i$ ist EV zum EW a_i.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i-te Zeile

Allgemeiner: Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ Basis von V,

$F: V \longrightarrow V$ mit

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix},$$

so ist $\underline{b}_i$ EV von F zum EW a_i.

$$
\begin{tikzcd}
e_i \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, bend right] & & & a_i \cdot e_i \\
& K^n \arrow[r, "M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & K^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}", "\cong"'] & \\
& V \arrow[r, "F"'] & V & \\
b_i \arrow[rrr, mapsto, dashed] & & & a_i \cdot b_i \arrow[uuu, bend right]
\end{tikzcd}
$$

Selbst wenn F diagonalisierbar ist sind nicht alle Vektoren EV.

z.B.: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zum EW 1

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV zum EW 2

Aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist gar kein EV

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\mathrm{Eig}(F;\lambda) \neq \emptyset$, denn

$\underline{0} \in \mathrm{Eig}(F;\lambda)$

$F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$ and $F(\underline{w}) = \lambda \cdot \underline{w}$,

dann $F(\underline{v} + \underline{w}) = F(\underline{v}) + F(\underline{w})$

$$= \lambda \underline{v} + \lambda \cdot \underline{w}$$
$$= \lambda(\underline{v} + \underline{w})$$

$F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$, $\mu \in K$, dann

$$F(\mu \cdot \underline{v}) = \mu F(\underline{v}) = \mu \cdot \lambda \cdot \underline{v}$$
$$= \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v})$$

$\square$)

($\lambda \cdot \underline{v} = F(\underline{v}) = \lambda' \cdot \underline{v}$

$\Rightarrow (\lambda - \lambda') \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\Rightarrow [\lambda - \lambda' = 0$ oder$]$ $\underline{v} = \underline{0}$)

Beweis: Induktion über ℓ.

IA: $\ell = 1$

Per Def. $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, also $(\underline{v}_1)$ l. u.

IV: Satz gilt für $\ell - 1$ EV.

IS: Angenommen

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \underline{v}_i = \underline{0}.$$

F

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

$\cdot \lambda_\ell$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \lambda_\ell \underline{v}_i = \underline{0}$$

Differenz: $$\sum_{i=1}^{\ell-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_\ell) \cdot \underline{v}_i = \underline{0}$$

Da $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{\ell-1}$ nach IV l. u., folgt

$$\alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_\ell)}_{\neq 0} = 0$$

für $i \in \{1, \ldots, \ell-1\}$,

also $$\alpha_i = 0$$

für $i \in \{1, \ldots, \ell-1\}$. Daher

$$\alpha_\ell \cdot \underbrace{v_\ell}_{\neq 0} = 0,$$

also auch $\alpha_\ell = 0$ $\square$

Beweis:

(1 ⇒ 2) V Basis aus EV

$$\sum_i \mathrm{Eig}(F,\lambda_i) \underset{DEF}{=} \mathrm{span}\left(\bigcup_i \mathrm{Eig}(F,\lambda_i)\right)$$

$$= V$$

(1 ⇐ 2) Nach Annahme hat V ein Erzeugendensystem aus EV. Wähle eine Basis aus.

(2 ⇔ 3) Es reicht zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{\ell} \dim \mathrm{Eig}(F,\lambda_i) = \dim\left(\sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{Eig}(F,\lambda_i)\right)$$

(Vorlesung 13: V endl.-dim
$W < V$ UVR.
$W = V \iff \dim W = \dim V$)

Seien also:

$(\underline{b}_1^{(1)}, \ldots, \underline{b}_{d_1}^{(1)})$ Basis von $\mathrm{Eig}(F; \lambda_1)$

$\vdots$

$(\underline{b}_1^{(\ell)}, \ldots, \underline{b}_{d_\ell}^{(\ell)})$ Basis von $\mathrm{Eig}(F; \lambda_\ell)$

Dann ist:

$(\underline{b}_1^{(1)}, \ldots, \underline{b}_{d_1}^{(1)}, \underline{b}_1^{(2)}, \ldots, \ldots, \underline{b}_1^{(\ell)}, \ldots, \underline{b}_{d_\ell}^{(\ell)})$

Basis von $\sum_i \mathrm{Eig}(F; \lambda_i)$.

Erzeugendensystem ✓

Linear unabhängig:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\left(\sum_{j_i=1}^{d_i} \alpha_{i j_i} \cdot \underline{b}_{j_i}^{(i)} \right)}_{\in \mathrm{Eig}(F; \lambda_i)} = \underline{0}$$

Aus Satz über lineare Unabhängigkeit von EV folgt:

$$\sum_{j_i=1}^{d_i} \alpha_{ij_i} \underline{b}_{j_i}^{(i)} = \underline{0}$$

für jedes i. Also folgt

$$\alpha_{ij_i} = 0 \quad \forall i, j_i. \qquad \square$$

Beispiel:

$$F: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \mathbb{R}^3$$

$$\chi_F = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 5-t \end{pmatrix}$$

$$= (5-t) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix}$$

$$= (5-t)\left((2-t)^2 - 1\right)$$

$$\ldots$$

$$= (5-t)(t-1)(t-3)$$